Aufstellung

von nicht-euklidischen Minimalflächen.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 3. Mai 1906

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Schübel

aus München.

München 1906.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552320_0132

Einleitung.

Die Minimalflächen lassen sich bekanntlich auch definieren als Flächen, auf denen die Minimalkurven zu einander konjugiert sind. Analog nennt man in der Cayleyschen Maßgeometrie solche Flächen Minimalflächen, bei denen die Linien von der Länge Null ein konjugiertes System bilden. Von dieser Definition ausgehend, führt Darboux im dritten Band, Buch IV, Kap. XIV seines Werkes „Sur la theorie générale des surfaces" das Problem, die Minimalflächen der Cayleyschen Maßgeometrie zu bestimmen, zurück auf die Integration folgenden Systems simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

A

I. $$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = C x$$

II. $$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0.$$

Die Größe C ist dabei eine Funktion der Parameter α und β und bestimmt als Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta} = C - \frac{1}{C};$$

eine Gleichung, die durch die Substitution $C = e^{2i\omega}$ übergeht in

III. $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin 2\omega.$$

Auf diese Form läßt sich nun sofort die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 2\omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin 2\omega$, welche die Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes bestimmt bringen durch die Substitution $\alpha = \sqrt{2}\,\alpha'$; $\beta = \sqrt{2}\,\beta'$.

Es besteht also zwischen den Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes und den nicht-euklidischen Minimalflächen der

Zusammenhang, daß jeder Lösung von $\frac{\partial^2 2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin 2\omega$, welche eine Fläche negativen konstanten Krümmungsmaßes bestimmt, eine bezw. unendlich viele nicht-euklidische Minimalflächen entsprechen.

Um nicht-euklidische Minimalflächen aufzustellen, werde ich, nachdem ich gezeigt habe, daß die Differentialgleichung für C weiter nichts als die Integrabilitätsbedingung des Systems A ist, in der Weise vorgehen, daß ich untersuche, unter welchen Bedingungen für C sich das System A integrieren läßt, und für einen Fall C unter Berücksichtigung dieser Bedingungen bestimmen. Dadurch gelingt es mir dann, zwei bezw. vier Gruppen von nicht-euklidischen Minimalflächen in Parameterform darzustellen.

Die Anregung zur Arbeit empfing ich von Herrn Universitätsprofessor Dr. F. Lindemann, dem ich hiefür sowie für die wohlwollende Unterstützung während der Ausführung zu wärmstem Danke verpflichtet bin.

I. Teil.

§ 1.

Die Integrabilitätsbedingung für System A.

Im System A ist die Funktion $C\ (\alpha\ \beta)$ noch vollständig unbekannt. Darboux zeigt nun in No. 833 des in der Einleitung genannten Werkes, daß C bestimmt ist als Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C - \frac{1}{C}$. Selbstverständlich muß auch die Bedinging, daß A ein vollständig integrables System bilden soll, Relationen für C ergeben. Und wie sich im folgenden zeigen wird, ist die von Darboux gegebene Differentialgleichung für C in der Tat weiter nichts als die Integrabilitätsbedingung für das System A.

Setzt man

$$\frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^2\partial\beta} = p_{21}; \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} = p_{12};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^3} = p_{30}; \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial\beta^3} = p_{03}$$

und drückt diese dritten Ableitungen durch die Ableitungen zweiter Ordnung aus, so ist die notwendige Bedingung dafür, daß A ein integrables System bildet, das Bestehen folgender drei Gleichungen

$$\frac{\partial p_{30}}{\partial\beta} = \frac{\partial p_{21}}{\partial\alpha}; \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial\beta} = \frac{\partial p_{12}}{\partial\alpha}; \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial\beta} = \frac{\partial p_{03}}{\partial\alpha}.$$

Man hat daher vor allem die dritten Ableitungen zu bilden. Schreibe ich für $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial\alpha} = v$, für $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial\beta} = r$, so erhalte ich durch Differentiation der Gleichungen I. und II. nach α bezw. β folgende Werte für die dritten Ableitungen

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} x + C \frac{\partial x}{\partial \alpha} \tag{1.}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha \partial \beta^2} = \frac{\partial C}{\partial \beta} x + C \frac{\partial x}{\partial \beta} \tag{2.}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \alpha^3} = C \frac{\partial x}{\partial \beta} + v \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \tag{3.}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \beta^3} = C \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial r}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} + r \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}. \tag{4.}$$

Die vierten Ableitungen ergeben sich jetzt durch Differentiation dieser eben erhaltenen vier Gleichungen und zwar wird:

$$\frac{\partial (1)}{\partial \alpha} = \frac{\partial p_{21}}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2} x + 2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + C \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \tag{5.}$$

$$\frac{\partial (2)}{\partial \beta} = \frac{\partial p_{12}}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 C}{\partial \beta^2} x + 2 \frac{\partial C}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} + C \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}. \tag{6.}$$

Unter Berücksichtigung von I und (1.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{30}}{\partial \beta} = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \left(C - \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \left(v \cdot C + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ & + \frac{\partial x}{\partial \beta} \left(\frac{\partial C}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + x \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} C + v \frac{\partial C}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \tag{7.}$$

Analog ergibt sich für $\frac{\partial p_{03}}{\partial \alpha}$, wenn man diesmal I und (2.) zur Umformung benützt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{03}}{\partial \alpha} = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \left(C - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ & + \frac{\partial x}{\partial \beta} \left(r C + \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + x \left(r \frac{\partial C}{\partial \alpha} + C \frac{\partial r}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \tag{8.}$$

Nach der Integrabilitätsbedingung hat jetzt die Gleichung $\frac{\partial p_{21}}{\partial \beta} = \frac{\partial p_{12}}{\partial \alpha}$ zu bestehen. Daß diese Gleichung tatsächlich erfüllt ist, folgt daraus, daß beide Ableitungen durch Differentiation der nämlichen Gleichung I erhalten werden, nur ist die Reihenfolge, in der diese Differentiationen ausgeführt werden, eine andere. $\frac{\partial p_{21}}{\partial \beta} = \frac{\partial p_{12}}{\partial \alpha}$ ist also für C identisch erfüllt und ergibt daher keine Beziehungen für die gesuchte Funktion.

Die Bedingung $\frac{\partial p_{21}}{\partial \alpha} = \frac{\partial p_{30}}{\partial \beta}$ führt auf folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}\left(C - \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}\left(C - \frac{\partial r}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta}\right) - \frac{\partial x}{\partial \beta}\left(\frac{\partial C}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = 0.$$

Setzt man nun für v und r, sowie für $\frac{\partial v}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ die entsprechenden Werte ein und zwar:

$$v = \frac{\partial \lg C}{\partial \alpha}, \quad r = \frac{\partial \lg C}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta},$$

so geht die Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right) - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right) + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right)}{\partial \beta} = 0.$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit $C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}$, so ergibt sich

(R)
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial\left[\lg\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\right]}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial\left[\lg\left(C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\right]}{\partial \beta} = 0.$$

Für das Bestehen der Integrabilitätsbedingung[1]) ist jetzt noch notwendig, daß die soeben gefundene Gleichung (R) in Verbindung mit den vorausgehenden Differentialgleichungen eine Identität ergibt. Sie muß daher mit der Gleichung (II.) des Systems A bis auf einen beliebigen Faktor, der eine Konstante oder irgend eine Funktion von α und β sein kann, übereinstimmen. Wegen der Gleichheit der Koeffizienten von $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$ aber ist dieser Faktor gleich 1. Aus diesem Grunde müssen auch die Koeffizienten von $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ in den beiden Gleichungen (R) und (II.) die nämlichen sein. Die

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung der Integrabilitätsbedingung findet sich z. B. bei Goursat „équations aux dérivées partielles du second ordre“ t. II No. 149.

Gleichsetzung derselben liefert dann zwei Relationen zur Bestimmung der unbekannten Funktion $C(\alpha\,\beta)$, nämlich:

$$\frac{\partial\left[\lg\left(C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\right]}{\partial\alpha}=-\frac{\partial\lg C}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial\left[\lg\left(C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\right]}{\partial\beta}=-\frac{\partial\lg C}{\partial\beta}.$$

Durch Integration dieser beiden Ausdrücke erhält man dann:

$$\lg\left(C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)=\lg\frac{1}{C}+\varphi(\beta)$$

$$\lg\left(C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)=\lg\frac{1}{C}+\psi(\alpha).$$

Da aber $\psi(\alpha)$ nur gleich $\varphi(\beta)$ sein kann, wenn $\psi(\alpha)=\varphi(\beta)=m$[1]) ist, so ergibt sich zur Bestimmung von C die Differentialgleichung:

$$C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{C}.$$

Als letzte Bedingung für die Integrabilität des Systems A ist das Bestehen der Gleichung $\frac{\partial p_{12}}{\partial\beta}=\frac{\partial p_{03}}{\partial\alpha}$ notwendig. Allein man sieht sofort ein, daß dies keine weiteren Relationen für C liefert. Setzt man nämlich Gleichung (6.) gleich Gleichung (8.) und geht analog wie bei der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p_{21}}{\partial\alpha}=\frac{\partial p_{30}}{\partial\beta}$ vor, so erhält man auch diesmal wieder die Differentialgleichung $C-\frac{\partial^2\lg C}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{C}$.

§ 2.

Untersuchungen über das System A.

Bianchi weist in den Rendiconti dell Accademia dei Lincei, Band 2 (1886) nach, daß das allgemeinste Integral eines Systems von der Form A nur von vier willkürlichen Konstanten abhängt.

[1]) Die Konstante m kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null angenommen werden, wie sich durch eine Paramentertransformation leicht bestätigen läßt.

Bourlet[1]) beweist das nämliche dadurch, daß er zeigt, daß man ein System wie A immer auf ein System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen kann. Die Auflösung eines solchen Systems bedingt aber im allgemeinen die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung, was in den wenigsten Fällen möglich ist.

Ich will daher einen anderen Weg einschlagen, nämlich versuchen, eine der beiden Gleichungen I. oder II. zu integrieren, sodann die beiden willkürlichen Funktionen, die ja immer in das Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung eingehen müssen, aus der anderen Gleichung des Systems A bestimmen, was nur die Auflösung zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfordern kann. Bestimme ich nämlich die erste arbiträre Funktion, so hängt die vollständige Lösung von mindestens zwei willkürlichen Konstanten ab, ebenso muß ich auch bei Bestimmung der anderen arbiträren Funktion wenigstens zwei willkürliche Konstante erhalten. Da aber in das allgemeine Integral des Systems A nur vier Konstante eingehen können, muß die Bestimmung der beiden willkürlichen Funktionen aus gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich sein.

1.

Die Möglichkeit der Integration der Gleichung I. und II. unter Anwendung der Methode von Laplace.[2])

Gleichung I. ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit gleichen Invarianten,[3]) eine sog. Moutardsche Gleichung. Für eine solche gilt immer folgendes:

1. Die allgemeine Lösung muß die Form haben:

$$z = X^{(n)} + A_1 X^{(n-1)} + \cdots + A_n X + Y^{(n)} + B_1 Y^{(n-1)} + \cdots + B_n Y,$$

---

[1]) Bourlet: Thèses „Sur les équations aux derivées partielles simultanées.“ Paris 1891.

[2]) Man vergleiche hiezu Darboux, leçons II, pag. 23 u. ff., sowie pag. 137 ff.

[3]) Als Invarianten einer Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \lambda \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial z}{\partial \beta} + \nu z = 0$$

bezeichnet man die beiden Ausdrücke (Darboux, leçons II, pag. 23):

$$h = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} + \lambda \mu - \nu; \quad k = \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \lambda \mu - \nu.$$

wobei X und Y willkürliche Funktionen der unabhängigen Parameter α und β sind, die A_ν und B_ν dagegen bestimmte Funktionen von α und β darstellen, und sich durch die Ableitungen der Invarianten h_i ausdrücken.

2. Bricht die Reihe E_i der transformierten Gleichungen bei Gleichung E_{n-1} ab, so muß die Reihe der E_{-i} bei E_{-n+1} abbrechen. Man braucht also bei Betrachtung der Invarianten der transformierten Gleichungen nur eine Reihe zu berücksichtigen.[1])

3. Für die Invarianten der nach der Laplaceschen Methode transformierten Gleichungen besteht die Rekursionsformel

$$h_{i+1} = 2h_i - k_i - \frac{\partial^2 \lg h_i}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Geht man nun an die Aufstellung der Invarianten für die Gleichung I., so ergibt sich:

$$h_0 = C; \quad k_0 = C$$

$$h_1 = C - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Da aber C immer der Bedingung $\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta} = C - \frac{1}{C}$ genügen muß, folgt:

$$h_1 = \frac{1}{C}; \quad k_1 = h_0 = C;$$

$$h_2 = \frac{2}{C} - \frac{\partial^2 \lg C}{\partial \alpha \partial \beta} - C = \frac{1}{C}; \quad k_2 = \frac{1}{C};$$

$$h_3 = C; \quad k_3 = \frac{1}{C};$$

$$h_4 = C; \quad k_4 = C.$$

Hieraus ersieht man, daß die Invarianten der Gleichung I. periodisch wiederkehrend sind. Die Methode von Laplace könnte also nur dann mit Erfolg auf I. angewendet werden, wenn entweder $C = 0$ oder $\frac{1}{C} = 0$ wäre, was jedoch unmöglich ist.

---

[1]) Dabei bedeutet E_i die Reihe der aus der ursprünglichen Gleichung E durch die Substitution $z_i = \frac{\partial z_{i-1}}{\partial \beta} + \lambda z_{i-1}$ entstehenden Gleichungen, und E_{-i} diejenige Reihe, welche durch die Substitution $z_{-i} = \frac{\partial z_{-i+1}}{\partial \alpha} + \mu z_{-i+1}$ entsteht.

Ich kann also durch das von mir eingeschlagene Verfahren nur dann zum Ziele kommen, wenn es mir gelingt, spezielle Werte von C so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung II. integriert werden kann. Letztere Gleichung muß daher vor allem auf die Normalform[1]) gebracht werden, welche die Methode von Laplace voraussetzt. Dies geschieht durch Einführung folgender Substitutionen:

$$u = \alpha + \beta; \qquad v = \alpha - \beta.$$

Gleichung II. geht dann über in:

$$\text{II b.} \quad 4\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial \lg C}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lg C}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial \lg C}{\partial \alpha} + \frac{\partial \lg C}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Berechnet man nun die Invarianten dieser transformierten Gleichung, so zeigt sich, daß auch II b eine Gleichung mit gleichen Invarianten ist. Dieselben lauten:

$$h = k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg C}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial \lg C}{\partial u}\frac{\partial \lg C}{\partial v},$$

da $$\frac{\partial \lg C}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg C}{\partial \alpha} + \frac{\partial \lg C}{\partial \beta}\right)$$ und

$$\frac{\partial \lg C}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg C}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lg C}{\partial \beta}\right)$$ ist.

Es kann somit II b durch die Substitution $x = l\,X$ immer auf die Form gebracht werden $\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = h\,X$, wobei l bestimmt ist durch die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \lg l}{\partial u\,\partial v} = \lambda\,\mu - \nu$.[2])

Für die Gleichung $\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = h\,X$ könnte man jetzt die Reihe der Invarianten berechnen, und untersuchen, welchen Bedingungen die noch unbestimmte Funktion C genügen muß, damit bestimmte Invarianten verschwinden, sodann darangehen, den zugehörigen Wert von ω unter Berücksichtigung dieser Bedingungen zu bestimmen.

---

[1]) Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist auf diese Normalform gebracht, wenn sie dargestellt ist durch

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \mu\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \nu\,\theta = 0.$$

[2]) Dabei bedeuten λ, μ, ν die Koeffizienten der in der Anmerkung S. 9 angeführten Laplaceschen Differentialgleichung.

2.

Bestimmung des allgemeinsten Integrals von II. unter der Voraussetzung $h_0 = 0$.

Die Invariante h_0 der Gleichung IIb. verschwindet, wenn:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg C}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial \lg C}{\partial u}\frac{\partial \lg C}{\partial v} = 0 \qquad \text{wird.}$$

Um das allgemeinste Integral dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu bestimmen, führe ich die Substitution $C_1^{\frac{1}{2}} = C_1^{-1}$ ein, dann ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \lg C_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial \lg C_1}{\partial v} = 0.$$

Da aber identisch

$$\frac{\partial^2 \lg C_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{C_1}\frac{\partial^2 C_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial C_1}{\partial u}\frac{\partial C_1}{\partial v}$$

ist, vereinfacht sich diese Gleichung in

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

wofür sich sofort das allgemeinste Integral angeben läßt, und zwar

$$C_1 = \varphi(u) + \psi(v),$$

dabei sind $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ arbiträre Funktionen von u bezw. v. Es ergibt sich somit, daß die Integration der Gleichung II. sofort geleistet werden kann, wenn C_1 die Form $\varphi(u) + \psi(v)$ besitzt. Daß auch auf C_1 die Differentialgleichung der Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes anzuwenden ist, ist selbstverständlich, man hat nur $C_1 = e^{-i\omega}$ zu setzen, und ω entsprechend zu bestimmen. Führt man auch in Gleichung IIb. C_1 an Stelle von C ein, so transformiert sich IIb. in

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Da $h = 0$ vorausgesetzt wird, kann man diese Gleichung unter Anwendung der Laplaceschen Methode sofort auf die Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u}x\right) + \frac{\partial \lg C_1}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u}x\right) = 0.$$

Wird $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u} x = x_1$ als neue abhängige Variable eingeführt, so erhält man für x_1 die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial v} x_1 = 0.$$

Eine erstmalige Quadratur ergibt sodann, wenn $M(u)$ eine arbitrare Funktion von u ist:

$$\lg x_1 = -\lg C_1 + \lg M(u)$$
$$x_1 = \frac{M(u)}{C_1}.$$

Setze ich für x_1 wieder seinen Wert in x, so ergibt sich zur Betimmung von x die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lg C_1}{\partial u} x = \frac{M(u)}{C_1},$$

eine Gleichung, die als eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung aufgefaßt und mittels Quadraturen integriert werden kann:

$$x = e^{-\int \frac{\partial \lg C_1}{\partial u} du} \left[R(v) + \int \frac{M(u)}{C_1} e^{\int \frac{\partial \lg C_1}{\partial u} du} du \right]$$
$$x = \frac{1}{C_1} [R(v) + \Phi(u)].$$

Dabei sind $\Phi(u) = \int M(u)\, du$, und $R(v)$ arbiträre Funktionen von u bezw. v.

Für $C_1 = \varphi(u) + \psi(v)$ ergibt sich also als allgemeinstes Integral der Gleichung II.:

$$x = e^{i\omega} (R(v) + \Phi(u)),$$

wo aber ω noch als Integral von $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin 2\omega$ unter der Nebenbedingung $-i\omega = \lg [\varphi(u) + \psi(v)]$ zu bestimmen ist. Nehme ich nun an $\psi(v) = 0$, das heißt ω möge eine Funktion von u allein sein, so wird:

$$x = e^{i\omega(u)} R(v) + \Omega(u).$$

Für den Fall, daß ω nur eine Funktion von v ist, wird das Integral von II.:

$$x = e^{i\omega(v)} \Phi(u) + N(v).$$

§ 3.

1.

Bestimmung von $\omega(\alpha \pm \beta)$.

Ist C_1 eine Funktion von $\alpha \pm \beta$, so muß $C = C_1^{-2}$ sowohl, wie auch $\omega = -i \lg C_1$ eine solche Funktion sein. Es ist also jetzt das Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin 2\omega$ unter Berücksichtigung der Bedingung $\omega = m(\alpha + \beta)$ bezw. $\omega = n(\alpha - \beta)$ zu bestimmen.

Setze ich für $\alpha + \beta = u$, so erhalte ich, da ω eine Funktion von $\alpha + \beta$ sein soll, für Gleichung III. folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\omega}{du^2} = 2 \sin \omega \cos \omega,$$

wofür ich auch schreiben kann:

$$\frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2}{du} = \frac{d \sin^2 \omega}{du}.$$

Eine erstmalige Quadratur ergibt:

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa + \sin^2 \omega},$$

wofür ich schreiben kann:

$$\frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{-\varkappa} \sin^2 \omega}} = \sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\, du.$$

Eine abermalige Quadratur liefert

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{-\varkappa} \sin^2 \omega}} = \sqrt{\varkappa}\,(\sqrt{2}\, u) + \text{konst.}^{1})$$

---

[1]) Die zu addierende Konstante kann wegen der geometrischen Bedeutung der rechten Seite ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden.

Unter Benützung der von Jacobi eingeführten Bezeichnung ergibt sich hieraus:

$$\omega = \text{am}\,[\sqrt{\varkappa}\,(\sqrt{2}\,\alpha + \sqrt{2}\,\beta)] \bmod \sqrt{-\frac{1}{\varkappa}},$$

und somit

$$C_1 = e^{-i\omega} = e^{-i\,\text{am}\,[\sqrt{\varkappa}(\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta)]}.$$

Bestimme ich nun ω unter Berücksichtigung der Bedingung $\omega = n\,(\alpha - \beta)$, indem ich analog $\alpha - \beta = v$ setze, so geht diesmal die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin 2\,\omega$ über in

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\omega}{dv^2} = -\sin\omega\,\cos\omega.$$

Diese Gleichung kann ganz auf die nämliche Weise integriert werden, wie im eben behandelten Falle, und es ergibt sich als Integral

$$\omega = \text{am}\,[\sqrt{\varkappa_1}\,(\sqrt{2}\,\alpha - \sqrt{2}\,\beta)] \bmod \sqrt{\frac{1}{\varkappa_1}}$$

und somit lautet das zugehörige $C_1\,(\alpha - \beta)$:

$$C_1 = e^{-i\,\text{am}\,[\sqrt{\varkappa_1}(\sqrt{2}\alpha - \sqrt{2}\beta)]}.$$

2.

Bestimmung der zu $\omega\,(\alpha \pm \beta)$ gehörigen Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes.

Wie ich schon in der Einleitung erwähnte, erhalte ich aus einem Werte ω, der als Integral der Differentialgleichung III. bestimmt ist, einen solchen, der der Differentialgleichung für die Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes genügt, wenn ich $\sqrt{2}\,\alpha$ und $\sqrt{2}\,\beta$ durch α bezw. β ersetze. Die Werte von ω also, welche zu diesen Flächen gehören, sind:

$$\omega = \text{am}\,[\sqrt{\varkappa}\,(\alpha + \beta)] \quad \text{und} \quad \omega = \text{am}\,[\sqrt{\varkappa_1}\,(\alpha - \beta)].$$

Bekanntlich läßt sich das Bogenelement einer jeden Fläche negativen konstanten Krümmungsmaßes für die Haupttangentenkurven als Parameterlinien immer auf die Form bringen:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\,\omega\; d\alpha\; d\beta,$$

wo ω den von den Haupttangentenkurven eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Im Falle $\omega = \operatorname{am}[\sqrt{\varkappa}(\alpha+\beta)]$ ist also

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + \cos[2\operatorname{am}[\sqrt{\varkappa}(\alpha+\beta)]]\, d\alpha\, d\beta.$$

Ich setze nun

$$\alpha+\beta = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\int \frac{du}{\sqrt{1+\frac{1}{\varkappa}\sin^2 u}}$$

$$\alpha-\beta = v,$$

somit

$$d\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{\sqrt{\varkappa+\sin^2 u}} + dv\right)$$

$$d\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{\sqrt{\varkappa+\sin^2 u}} - dv\right)$$

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du^2}{\varkappa+\sin^2 u} + dv^2\right)$$

$$2\, d\alpha\, d\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{du^2}{\varkappa+\sin^2 u} - dv^2\right).$$

Da außerdem $\omega = u$ und $\cos 2\omega = \cos^2\omega - \sin^2\omega$ ist, wird

$$ds^2 = \frac{1}{2}du^2\frac{1}{\varkappa+\sin^2 u} + \frac{1}{2}dv^2 + \frac{1}{2}(\cos^2 u - \sin^2 u)\left(\frac{du^2}{\varkappa+\sin^2 u} - dv^2\right)$$

$$ds^2 = \frac{\cos^2 u}{\varkappa+\sin^2 u}du^2 + \sin^2 u\, dv^2.$$

Führe ich als neue unabhängige Variable $\sin u = u_1$ ein, so nimmt das Bogenelement die Form an:

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{\varkappa+\mu_1^2} + u_1^2\, dv^2.$$

Um als Koeffizienten von du_1^2 den Wert 1 zu erhalten, setze ich

$$\int \frac{du_1}{\sqrt{\varkappa+u_1^2}} = u_2;$$

woraus sich dann durch Quadratur

$$u_1 = \frac{\sqrt{\varkappa}}{i}\sin(i\,u_2)$$

bestimmt.

Führt man für $\sin(iu_2)$ die Exponentialfunktion ein, und setzt die erhaltenen Werte in die Gleichung für das Bogenelement ein, so ergibt sich für dasselbe:

$$ds^2 = du_2^2 + \varkappa \left(\frac{e^{u_2} - e^{-u_2}}{2}\right)^2 dv^2.$$

Dies ist aber die Form für das Bogenelement der Rotationsflächen negativen konstanten Krümmungsmaßes vom elliptischen Typus; somit ist gezeigt, daß $\omega = \operatorname{am}[\sqrt{\varkappa}(\alpha + \beta)]$ diesen Flächen zugehört.

Im Falle $\omega = \operatorname{am}(\sqrt{\varkappa_1}(\alpha - \beta))$ geht man in analoger Weise vor wie für $\omega(\alpha + \beta)$.

Substituiert man

$$\alpha - \beta = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa_1}\sin^2 u}}, \qquad \alpha + \beta = v,$$

so erhält man als Gleichung für das Bogenelement:

$$ds^2 = \frac{1}{2}\,dv^2 + \frac{1}{2(\varkappa_1 - \sin^2 u)}\,du^2 + \frac{1}{2}(\cos^2 u - \sin^2 u)\left(dv^2 - \frac{du^2}{\varkappa_1 - \sin^2 u}\right)$$

oder vereinfacht

$$ds^2 = \cos^2 u\, dv^2 + \frac{\sin^2 u}{\varkappa_1 - \sin^2 u}\, du^2.$$

Führt man $\cos u = u_1$ als neue unabhängige Variable ein, so ergibt sich für das Bogenelement

$$ds^2 = u_1^2\, dv^2 + \frac{du_1^2}{\varkappa_2 + u_1^2},$$

wobei $\varkappa_2 = \varkappa_1 - 1$ ist.

Um auch hier als Koeffizienten von du_1^2 den Wert 1 zu erhalten, setze ich

$$-\int \frac{du_1}{\sqrt{\varkappa_2 + u_1^2}} = u_2,$$

woraus sich durch Quadratur

$$u_1 = \frac{\sqrt{\varkappa_2}}{i}\cos(iu_2) = \frac{\sqrt{\varkappa_2}}{i}\,\frac{e^{u_2} + e^{-u_2}}{2} = \sqrt{\varkappa_3}\,\frac{e^{u_2} + e^{-u_2}}{2}$$

bestimmt.

Dadurch geht das Bogenelement über in

$$ds^2 = \varkappa_3 \left(\frac{e^{u_2} + e^{-u_2}}{2}\right)^2 dv^2 + du_2^2,$$

was anzeigt, daß die zu am $(\sqrt{\varkappa_1}\,(\alpha-\beta))$ gehörigen Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes die Rotationsflächen vom parabilischen Typus sind.

Wie man sich leicht überzeugen kann, ergibt im ersten Falle $\varkappa = 0$, im zweiten Falle $\varkappa_1 = 1$ die Rotationsfläche der Traktrix.

Für diese wird

$$\frac{d\omega}{du} = \sin\omega; \qquad u = \int \frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Durch Quadratur erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = e^{\alpha+\beta}.$$

Somit wird der entsprechende Wert von $C = e^{4i\,\operatorname{artg} e^{\sqrt{2}(\alpha+\beta)}}$.

II. Teil.

Aufstellung der Gleichungen der nicht-euklidischen Minimalflächen für $C(\alpha \pm \beta)$.

Für $C(\alpha \pm \beta)$ ergab sich als allgemeinstes Integral der Gleichung II. des Systems A

$$x = e^{i\omega(u)}\,R(v) + \Omega(u); \text{ bezw. } x = e^{i\omega(v)}\,\Phi(u) + N(v).$$

Wie ich schon in § 2 des ersten Teiles ausführte, will ich die unbekannten Funktionen $R(v)$ und $\Omega(u)$ bezw. $\Phi(u)$ und $N(v)$ aus der Gleichung I. bestimmen, da ja Gleichung I. auch für einen Summanden allein bestehen muß.

§ 1.

$$C_1 = e^{-i\,\mathrm{am}\,[\sqrt{\varkappa}(\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta)]}.$$

1.

Bestimmung der willkürlichen Funktion $\Omega(u)$.

Setze ich $\alpha + \beta = u$, so geht die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = e^{2i\omega}\,x \text{ für } x = \Omega(u)$$

über in die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\,\Omega}{du^2} = e^{2i\omega}\,\Omega. \tag{1.}$$

Von dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung gehe ich jetzt durch die Substitution $\Omega = e^{\int \varphi\, du}$ zur entsprechenden Riccatischen Differentialgleichung über, die dann lautet:

$$\frac{d\varphi}{du} + \varphi^2 = e^{2i\omega}. \tag{2.}$$

Wird nun als neue unabhängige Variable ω eingeführt, und berücksichtigt man dabei die Gleichung

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa + \sin^2\omega},$$

so verwandelt sich (2.) in

$$\frac{d\varphi}{d\omega}\sqrt{2}\sqrt{\varkappa + \sin^2\omega} + \varphi^2 = e^{2i\omega}. \tag{3.}$$

Setzt man $e^{i\omega} = m$, so bestehen die Relationen

$$\frac{dm}{d\omega} = im; \qquad \sin\omega = \frac{m^2 - 1}{2im}$$

und die Differentialgleichung geht über in

$$\frac{d\varphi}{dm}\cdot\sqrt{2}\,im\sqrt{\frac{4\varkappa m^2 - (m^2-1)^2}{4m^2}} + \varphi^2 = m^2;$$

$$\frac{d\varphi}{dm}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(m^2-1)^2 - 4\varkappa m^2} + \varphi^2 = m^2. \tag{4.}$$

Um zu erreichen, daß der Koeffizient von $\frac{d\varphi}{dm}$ eine Konstante wird, führe ich eine neue Transformation der unabhängigen Variablen aus und zwar

$$\frac{dm}{\sqrt{(m^2-1)^2 - 4\varkappa m^2}} = dx,$$

also

$$x = \int \frac{dm}{\sqrt{m^4 - m^2(2 + 4\varkappa) + 1}}. \tag{5.}$$

m kann hieraus als elliptische Funktion von x berechnet werden. Zu diesem Zwecke bringe ich das elliptische Integral auf die Normalform

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

durch die Substitution $m^2 = n$; $dm = \frac{dn}{\sqrt{2}m}$; somit

$$x = \int \frac{dn}{2\sqrt{n^3 - n^2 a + n}}, \text{ wobei } a = 2 + 4\varkappa.$$

Es muß jetzt noch der Koeffizient des quadratischen Gliedes Null werden, was sich sofort erreichen läßt, wenn man $n = r + \frac{a}{3}$ setzt.

$$x = \int \frac{dr}{2\sqrt{r^3 - r\left(\frac{a^2}{3} - 1\right) - \left(\frac{2a^3}{3^3} - \frac{a}{3}\right)}},$$

woraus folgt:

$$r = \wp(x); \quad n = \wp(x) + \frac{a}{3} = m^2,$$

wobei $\wp(x)$ die Weierstraßsche $\wp$ Funktion bedeutet, und

$$g_2 = 4\left(\frac{a^2}{3} - 1\right), \quad g_3 = 4\left(\frac{2a^3}{3^3} - \frac{a}{3}\right)$$

ist. Es geht dann Gleichung (4.), wenn x als neue unabhängige Variable eingeführt wird, über in:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\wp(x) + \frac{a}{3}\right)\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\varphi^2.$$

Von dieser Riccatischen Differentialgleichung gehe ich jetzt durch die Substitution $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d \lg U}{dx}$ wieder zurück auf die zugehörige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{gathered} -\sqrt{2}\frac{d^2U}{dx^2} + 2\left(\wp(x) + \frac{a}{3}\right)\sqrt{2}\,U = 0, \\ \frac{d^2U}{dx^2} = \left[2\wp(x) + \frac{2}{3}a\right]U. \end{gathered} \tag{7.}$$

Diese Differentialgleichung ist die Lamésche Differentialgleichung $y'' = [n(n+1)\wp(u) + B]y$ für den einfachsten Fall $n = 1$ und $B = \frac{2}{3}a$. Bekanntlich stellt sich das Integral in diesem Falle als die Summe zweier elliptischer Funktionen zweiter Art dar:[1])

[1]) Cf. Halphen „Fonctions elliptiques“ II, Kap. XII.

$$U = c_1 \frac{\sigma(x-\gamma)}{\sigma(x)\,\sigma(\gamma)} e^{x\zeta(\gamma)} + c_2 \frac{\sigma(x+\gamma)}{\sigma(x)\,\sigma(\gamma)} e^{-x\zeta(\gamma)},$$

wobei $+\gamma$ und $-\gamma$ die Lösungen von $\wp(\gamma) = \frac{2}{3}a$ sind.

Geht man nun von U wieder auf $\Omega(\alpha+\beta)$ zurück, so kann man leicht bestätigen, daß $U(x) = \Omega(\alpha+\beta)$ ist. Da, wie man aus der Definitionsgleichung für x ersehen kann, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)$ ist, folgt

$$\Omega(\alpha+\beta) = c_1 \frac{\sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)-\gamma\right)}{\sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right)\sigma(\gamma)} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\zeta(\gamma)}$$

$$+ c_2 \frac{\sigma\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)-\gamma\right]}{\sigma\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right]\sigma\gamma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\zeta(\gamma)}.$$

2.

Bestimmung von $R(v)$.

Gleichung II. des Systems A wird auch von $x = e^{i\omega} R(v)$ befriedigt, wobei $(\alpha-\beta) = v$ gesetzt ist. Für diesen Wert von x geht die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = Cx$ in eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $R(v)$ über.

Man erhält nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = e^{i\omega}\frac{\partial R}{\partial\alpha} + iRe^{i\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = ie^{i\omega}\frac{\partial R}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + e^{i\omega}\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\,\partial\beta} + iR\left(e^{i\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} + ie^{i\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)$$

$$+ ie^{i\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial R}{\partial\beta}.$$

Außerdem bestehen noch folgende Beziehungen:

$$\omega = \operatorname{am}\left[\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}(\alpha+\beta)\right]; \qquad C = e^{2i\omega}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \sin 2\omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{dR}{dv}; \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = -\frac{dR}{dv}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \, \partial \beta} = -\frac{d^2 R}{dv^2}.$$

Da

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} = C x$$

sein soll, besteht die Gleichung

$$e^{3i\omega} R = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} e^{i\omega} i + e^{i\omega} \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \, \partial \beta} + i R \left(e^{i\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} + i e^{i\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) + i e^{i\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial R}{\partial \beta}. \tag{8.}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich unter Berücksichtigung der eben aufgestellten Beziehungen und wenn man noch mit $e^{i\omega}$ wegdividiert, wie folgt:

$$e^{2i\omega} R = -\frac{d^2 R}{dv^2} + R (i \sin 2\omega - 2\varkappa - 2 \sin^2 \omega).$$

Da aber

$$e^{2i\omega} = \cos 2\omega + i \sin 2\omega$$

und

$$\cos 2\omega = 1 - 2 \sin^2 \omega$$

ist, so folgt:

$$0 = -\frac{d^2 R}{dv^2} + R (i \sin 2\omega - i \sin 2\omega - 2\varkappa + 2 \sin^2 \omega - 1 - 2 \sin^2 \omega)$$

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + (2\varkappa + 1) R = 0. \tag{9.}$$

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, ihr allgemeinstes Integral kann daher sofort angegeben werden:

$$R = c_3 \cos (\sqrt{2\varkappa + 1} \cdot v) + c_4 \sin (v \cdot \sqrt{2\varkappa + 1}).$$

3.

Darstellung der zu $C(\alpha+\beta)$ gehörigen nicht-euklidischen Minimalflächen in Parameterform.

Wie ich in 1 und 2 soeben berechnete, ergibt sich für $C(\alpha+\beta)$ als allgemeinstes Integral des Systems A:

$$\Theta = c_1 \frac{\sigma(u_1-\gamma)}{\sigma u_1 \sigma \gamma} e^{u_1 \zeta \gamma} + c_2 \frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma(u_1)\sigma\gamma} e^{-u_1\zeta\gamma} + c_3 e^{i\omega} \cos(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}) + c_4 e^{i\omega}\sin(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}),$$

dabei sind $c_1\, c_2\, c_3$ und c_4 willkürliche Konstante und an Stelle von $(\alpha+\beta)\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha-\beta$ ist u_1 bzw. v gesetzt.

Es sind nun

$$\vartheta_1 = e^{i\omega}\cos(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1})$$
$$\vartheta_2 = e^{i\omega}\sin(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1})$$
$$\vartheta_3 = \frac{\sigma(u_1-\gamma)}{\sigma u_1 \sigma\gamma} e^{u_1\zeta\gamma}$$
$$\vartheta_4 = \frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma u_1\sigma\gamma}\cdot e^{-u_1\zeta\gamma}$$

partikuläre Integrale des Systems A, daher ist auch jede lineare Verbindung dieser vier partikulären Integrale ein solches.

Die homogenen Koordinaten der zu bestimmenden nicht-euklidischen Minimalflächen sollen aber partikuläre Integrale des Systems A sein, und müssen deshalb die Form haben:

(a)
$$x = a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2 + a_3\vartheta_3 + a_4\vartheta_4$$
$$y = b_1\vartheta_1 + b_2\vartheta_2 + b_3\vartheta_3 + b_4\vartheta_4$$
$$z = c_1\vartheta_1 + c_2\vartheta_2 + c_3\vartheta_3 + c_4\vartheta_4$$
$$t = e_1\vartheta_1 + e_2\vartheta_2 + e_3\vartheta_3 + e_4\vartheta_4,$$

wobei außerdem noch die Bedingung erfüllt sein muß

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Bilde ich nun diese Quadrate, so würde sich eine Gleichung von folgender Form ergeben:

$$e^{2i\omega(u)} f_1(v) + \chi_1(u) f_2(v) = \chi_2(u);$$

eine solche Gleichung kann aber nur bestehen, wenn sich sowohl $f_1(v)$ als auch $f_2(v)$ auf eine Konstante reduzieren.

Dieser Bedingung kann ich sofort Genüge leisten, wenn ich $a_1 = b_2$ und $a_2 = a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$ setze, und noch die weitere Annahme mache $c_1 = c_2 = e_1 = e_2 = 0$.

Die Koordinaten der zu $C(\alpha + \beta)$ gehörigen nicht-euklidischen Minimalflächen lauten somit:

$$x = a_1 e^{i\omega} \cos(v \cdot \sqrt{2\varkappa + 1})$$

$$y = a_1 e^{i\omega} \sin(v \sqrt{2\varkappa + 1})$$

(B)
$$z = c_3 \frac{\sigma(u_1 - \gamma)}{\sigma u_1 \sigma \gamma} e^{u_1 \zeta \gamma} + c_4 \frac{\sigma(u_1 + \gamma)}{\sigma(u_1) \sigma \gamma} e^{-u_1 \zeta \gamma}$$

$$t = e_3 \frac{\sigma(u_1 - \gamma)}{\sigma u_1 \sigma \gamma} e^{u_1 \zeta \gamma} + e_4 \frac{\sigma(u_1 + \gamma)}{\sigma u_1 \sigma \gamma} e^{-u_1 \zeta \gamma}.$$

Relationen für die Koeffizienten $a_1\, c_3,\ c_4,\ e_3,\ e_4$ liefert die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

Bildet man $x^2 + y^2$, so ergibt sich

$$x^2 + y^2 = a_1^2 e^{2i\omega};$$

da aber $e^{2i\omega} = m^2$ und $m^2 = \wp(u_1) + \frac{a}{3}$ war,[1]) so folgt

$$x^2 + y^2 = a_1^2 \left(\wp(u_1) + \frac{a}{3} \right).$$

Somit

$$z^2 + t^2 = 1 - a_1^2 \left(\wp(u_1) + \frac{a}{3} \right).$$

Aus (B) folgt

$$z^2 = c_3^2 \frac{\sigma^2(u_1 - \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{2u_1 \zeta \gamma} + c_4^2 \frac{\sigma^2(u_1 + \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{-2u_1 \zeta \gamma} + 2 c_3 c_4 \frac{\sigma(u_1 - \gamma)\, \sigma(u_1 + \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma}.$$

Da aber

$$\frac{\sigma(u_1 - \gamma)\, \sigma(u_1 + \gamma)}{\sigma^2(u_1) \sigma^2 \gamma} = -\wp(u_1) + \wp(\gamma)$$

ist, wird

$$z^2 = c_3^2 \frac{\sigma^2(u_1 - \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{2u_1 \zeta \gamma} + c_4^2 \frac{\sigma^2(u_1 + \gamma)}{\sigma^2(u_1) \sigma^2 \gamma} e^{-2u_1 \zeta \gamma} + 2 c_3 c_4 (\wp(\gamma) - \wp(u_1))$$

[1]) Cf. S. 20.

und aus demselben Grunde

$$t^2 = e_3^2 \frac{\sigma^2(u_1 - \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{2u_1\zeta\gamma} + e_4^2 \frac{\sigma^2(u_1 + \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{-2u_1\zeta\gamma} + 2 e_3 e_4 (\wp(\gamma) - \wp(u_1)).$$

$$z^2 + t^2 = \frac{\sigma^2(u_1 - \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{2u_1\zeta\gamma}(c_3^2 + e_3^2) + \frac{\sigma^2(u_1 + \gamma)}{\sigma^2 u_1 \sigma^2 \gamma} e^{-2u_1\zeta\gamma}(c_4^2 + e_4^2)$$
$$+ 2(e_3 e_4 + c_3 c_4)[\wp(\gamma) - \wp(u_1)] = 1 - a_1^2 \left(\wp(u_1) + \frac{a}{3}\right). \qquad (10.)$$

Da nun $\wp(\gamma) = \frac{2}{3} a$ [1]) ist, wird

$$z^2 + t^2 = 1 - a_1^2 \left[\wp(u_1) + \frac{\wp(\gamma)}{2}\right].$$

Gleichung (10.) ist nun immer identisch erfüllt, wenn

$$\alpha) \quad c_3^2 + e_3^2 = 0,$$
$$\beta) \quad e_4^2 + c_4^2 = 0$$

und außerdem noch

$$-2(c_3 c_4 + e_3 e_4)[\wp(u_1) - \wp(\gamma)] = 1 - a_1^2 \left[\wp(u_1) + \frac{\wp(\gamma)}{2}\right]$$

ist, woraus noch die zwei weiteren Bedingungsgleichungen folgen:

$$\gamma) \quad 2(c_3 c_4 + e_3 e_4) = a_1^2$$
$$\delta) \quad 4(c_3 c_4 + e_3 e_4) = 2 - a_1^2 \wp(\gamma).$$

Wählt man nun die Konstanten $a_1 c_3 c_4 e_3$ und e_4 so, daß diese vier Gleichungen befriedigt werden, so ist dadurch eine erste Gruppe von Minimalflächen der nicht-euklidischen Geometrie bestimmt.

Zu jeder dieser Flächen lassen sich beliebig viele andere aufstellen und zwar durch die lineare Substitution

$$\xi = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t$$
$$\eta = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t$$
$$\zeta = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t$$
$$\tau = a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t,$$

dabei müssen nur die Koeffizienten a_{ir} so gewählt werden, daß $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 = 1$ wird, ein Problem, das ausführlich in dem 2. Band der „Vorlesungen über Geometrie“ von F. Lindemann behandelt ist. Die durch diese Substitution abgeleiteten Flächen sind

---

[1]) Cf. S. 21.

entstanden zu denken durch eine Bewegung des elliptischen Raumes in sich, sind also im Sinne der nicht-euklidischen Geometrie kongruente Flächen.

Für die in (B) dargestellten Flächen läßt sich nun zeigen, daß sie auch Rotationsflächen sind.

Da die Rotation um die Axe $x = 0$, $y = 0$ analytisch gegeben ist durch die Transformation (vgl. hiezu Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II 1, pag. 496)

$$z = \zeta;\ t = \tau;$$
$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha$$
$$y = -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha,$$

so ist

$$\frac{z}{t} = \frac{\zeta}{\tau};\quad \frac{x^2+y^2}{t^2} = \frac{\xi^2+\eta^2}{\tau^2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2;$$

hieraus folgt, daß $\frac{z}{t} = F\left(\frac{x^2+y^2}{t^2}\right)$ die allgemeinste Form einer Rotationsfläche mit der Axe $y = 0$, $x = 0$ ist, da eine solche Fläche bei einer Rotation um die genannte Axe ungeändert bleibt.

Für die Flächen (B) gilt

$$\frac{z}{t} = \Psi(u_1);\quad \frac{x^2+y^2}{t^2} = \frac{a_1 e^{2i\omega}}{t^2} = \Phi(u_1)$$

durch Elimination von u_1

$$\frac{z}{t} = F\left(\frac{x^2+y^2}{t^2}\right).$$

Somit sind die aufgestellten nicht-euklidischen Minimalflächen auch gleichzeitig nicht-euklidische Rotationsflächen.

§ 2.

$$C_1 = e^{-i\,\mathrm{am}[\sqrt{\varkappa_1}(\lambda 2\alpha - \lambda 2\beta)]}.$$

Eine zweite Gruppe von ebenfalls einfach unendlich vielen, nicht-euklidischen Minimalflächen liefert die Behandlung von $C(\alpha-\beta)$. Für diesen Fall ergab sich als Integral [1]) des Systems A

$$x = e^{i\omega}\Phi(u) + N(v).$$

[1]) Cf. S. 13.

Auch hier sind die beiden arbiträren Funktionen $\Phi(u)$ und $N(v)$ aus der Gleichung I zu bestimmen, und zwar sind dabei die Überlegungen genau dieselben wie im Falle $C(\alpha+\beta)$.

1.

Bestimmung der willkürlichen Funktion $N(v)$.

Für $x = N(v)$ geht die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = e^{2i\omega}x$ über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\frac{d^2N}{dv^2} = e^{2i\omega}N \qquad (\alpha-\beta=v).$$

Die zugehörige Riccatische Differentialgleichung lautet

$$-\frac{d\varphi_1}{dv} - \varphi_1^2 = e^{2i\omega},$$

eine Gleichung, die sich wegen der Beziehung $\frac{d\omega}{dv} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}$ transformiert in

$$\frac{d\varphi_1}{dv}\sqrt{2}\sqrt{\varkappa_1-\sin^2\omega} + \varphi_1^2 = -e^{2i\omega}.$$

Führt man auch hier $e^{i\omega} = m_1$ als neue unabhängige Variable ein, so ergibt sich

$$\frac{d\varphi_1}{dm_1}\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\sqrt{(m_1^2-1)^2 - 4\varkappa_2 m_1^2} + \varphi_1^2 = -m_1^2; \qquad (\varkappa_2 = -\varkappa_1).$$

Substituiere ich dann analog

$$\int\frac{dm_1}{\sqrt{(m_1^2-1)^2-4\varkappa_2 m_1^2}} = y,$$

so erhalte ich nach Ausführung der entsprechenden Rechnung wie im Falle $C(\alpha+\beta)$

$$\frac{d\varphi_1}{dy} = -\frac{\sqrt{2}}{i}\left(\wp(y)+\frac{b}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{i}\varphi_1^2; \qquad (b = 2+4\varkappa_2).$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wird diesmal erhalten durch die Substitution $\varphi_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{d\lg U_1}{dy}$ und lautet

$$-\frac{\sqrt{2}}{i}\frac{d^2U_1}{dy^2}+\left[\wp(y)+\frac{b}{3}\right]\frac{2\sqrt{2}}{i}U_1=0,$$

$$\frac{d^2U_1}{dy^2}=\left[2\wp(y)+\frac{2}{3}b\right]U_1.$$

Als Integral dieser Lancéschen Differentialgleichung findet man[1])

$$U_1=c_1\frac{\sigma(y-\gamma_1)}{\sigma(y)\,\sigma\gamma_1}e^{y\zeta\gamma_1}+c_2\frac{\sigma(y+\gamma_1)}{\sigma y\,\sigma\gamma_1}e^{-y\zeta\gamma_1},$$

wobei $+\gamma_1$ und $-\gamma_1$ die Lösungen von $\wp(\gamma_1)=\frac{2}{3}b$ sind.

Außerdem folgt aus der Definitionsgleichung für y, daß $y=\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)$ ist. Geht man nun von U_1 wieder auf $N(v)$ zurück, so kann man leicht zeigen: $U_1(y)=N(v)$. Somit

$$N(v)=\frac{c_1\sigma\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)-\gamma_1\right]}{\sigma\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)\right]\sigma\gamma_1}e^{\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)\zeta\gamma_1}+c_2\frac{\sigma\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)+\gamma_1\right]}{\sigma\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha-\beta)\right]\sigma\gamma_1}e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)\zeta\gamma_1}.$$

2.

Bestimmung von $\Phi(u)$ und der zu $C(\alpha-\beta)$ gehörigen nicht-euklidischen Minimalflächen.

Diesmal gelten die Beziehungen[2])

$$\omega=am\left[\sqrt{\varkappa_1}\sqrt{2}\cdot v\right];\qquad(v=\alpha-\beta)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=\sqrt{2}\sqrt{\varkappa_1-\sin^2\omega}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\frac{d\Phi}{du};\quad\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{d^2\Phi}{du^2};\qquad(u=\alpha+\beta).$$

Analog ergibt sich jetzt, da $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=-2\varkappa_1+2\sin^2\omega$ wird, zur Bestimmung von Φ die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$e^{2i\omega}\Phi=\frac{d^2\Phi}{du^2}+\Phi(i\sin 2\omega+2\varkappa_1-2\sin^2\omega)$$

$$\frac{d^2\Phi}{du^2}+(2\varkappa_1-1)\Phi=0.$$

[1]) Cf. S. 20. [2]) Cf. S. 15 ff.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$\Phi = c_3 \cos\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right] + c_4 \sin\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right].$$

Als Integral des Systems A ergibt sich hieraus im Fall $C\,(\alpha - \beta)$

$$\Theta_1 = c_1 \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma \gamma_1} e^{v_1 \zeta \gamma_1} + c_2 \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma(v_1)\, \sigma \gamma_1} e^{-v_1 \zeta \gamma_1}$$

$$+ c_3 e^{i\omega} \cos\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right] + c_4 e^{i\omega} \sin\left[u \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right]; \left(v_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)\right).$$

Auch hier müssen die Koordinaten $x\ y\ z\ t$ der nicht-euklidischen Minimalflächen partikuläre Integrale des Systems A sein und der Bedingung genügen $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.[1]) Dies ist immer erfüllt für

$$(B_1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11} e^{i\omega} \cos\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right] \\ y_1 &= a_{11} e^{i\omega} \sin\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right] \\ z_1 &= c_{31} \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma \gamma_1} e^{v_1 \zeta \gamma_1} + c_{41} \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma \gamma_1} e^{-v_1 \zeta \gamma_1} \\ t_1 &= e_{31} \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma \gamma_1} e^{v_1 \zeta \gamma_1} + e_{41} \frac{\sigma(v_1 + \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma \gamma_1} e^{-v_1 \zeta \gamma_1}. \end{aligned}$$

Dabei bestimmen sich die Koeffizienten $a_{11}\ c_{31}\ c_{41}\ e_{31}$ und e_{41} aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} &\alpha_1) \quad c_{31}^2 + e_{31}^2 = 0 \\ &\beta_1) \quad c_{41}^2 + e_{41}^2 = 0 \\ &\gamma_1) \quad 2\,(c_{31}\, c_{41} + e_{31}\, e_{41}) = a_{11}^2 \\ &\delta_1) \quad 4\,(c_{31}\, c_{41} + e_{31}\, e_{41}) = 2 - a_{11}^2\, \wp(\gamma_1). \end{aligned}$$

Selbstverständlich liefert auch diesmal die nämliche lineare Substitution wie in § 1 aus (B_1) die kongruenten nicht-euklidischen Minimalflächen.

---

[1]) Cf. II, § 1 S. 24 und 25.

III. Teil.

Folgerungen für die Polarflächen. Zurückführung zweier besonderer Fälle auf Kreisfunktionen.

§ 1.

Folgerungen.

Bei Aufstellung der Differentialgleichung II. führt Darboux die Ebenenkoordinaten u, v, w und p der zu bestimmenden Fläche ein.[1]) Diese Koordinaten ergeben sich aus partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{C}\,\frac{\partial C}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} + u$$

und den analogen für v, w und p, welche man erhält, wenn man x und u durch y und v bezw. z und w bezw. t und p ersetzt. Kennt man nun die Punktkoordinaten x, y, z, t einer nicht-euklidischen Minimalfläche, so erfordert die Aufstellung der Ebenenkoordinaten nur Differentiationen. Diese Ebenenkoordinaten können aber auch aufgefaßt werden als Punktkoordinaten des Poles der Tangentialebene in bezug auf die Fundamentalfläche. Die Pole bestimmen dann eine neue Fläche, welche ebenfalls eine nicht-euklidische Minimalfläche ist, denn bei der Transformation durch reziproke Polare bleibt die Eigenschaft des Konjugiertseins von Tangenten erhalten, wie auch Tangenten an die Fundamentalfläche durch diese Transformation wieder in solche übergehen.

Zur Aufstellung der reziproken Polarflächen sind vor allem die ersten und zweiten Ableitungen nach α zu berechnen.

1.

Bestimmung der zur Gruppe (B) gehörigen Polarflächen.

Es ist $\omega = \operatorname{am}\left[\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\,(\alpha+\beta)\right]$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa + \sin^2\omega}; \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \sin 2\omega$$

$$x = a_1 e^{i\omega} R_1 \qquad (R_1 = \cos\left[(\alpha-\beta)\sqrt{2\varkappa+1}\right]).$$

[1]) Cf. Darboux lec. III pag. 476.

Durch einmalige bezw. zweimalige Differentiation nach α ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = a_1 \left[e^{i\omega} \frac{\partial R_1}{\partial \alpha} + i e^{i\omega} R_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right]$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = a_1 \left[e^{i\omega} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \alpha^2} + 2 i e^{i\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial R_1}{\partial \alpha} + i e^{i\omega} R_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - e^{i\omega} R_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 \right]$$

$$u = \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - 2 i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

$$= a_1 \left[e^{i\omega} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \alpha^2} + i e^{i\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} R_1 + e^{i\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 R_1 \right].$$

Da aber

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \alpha^2} = \frac{d^2 R_1}{d v^2} = [-2\varkappa - 1] R$$

ist, folgt

$$u = a_1 e^{i\omega} R_1 [-2\varkappa - 1 + i \sin 2\omega + 2\varkappa + 2 \sin^2 \omega]$$

$$= - a_1 e^{i\omega} R_1 \{\cos 2\omega - i \sin 2\omega\}$$

$$u = - a_1 R_1 e^{-i\omega}.$$

Setzt man in dieser Rechnung an Stelle R_1 den Wert $R_2 = \sin [(\alpha - \beta) \sqrt{2\varkappa + 1}]$, so ergibt sich

$$v = - a_1 R_2 e^{-i\omega}.$$

Zur Berechnung von w und p ist die Kenntnis der ersten Ableitung der elliptischen Funktion zweiter Art

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma(u)\, \sigma(v)} e^{-u \zeta v}$$

notwendig.

Differentiiert man logarithmisch, so erhält man bekanntlich:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \zeta(u \pm v) - \zeta(u) \mp \zeta(v).$$

Es ist nun $z = c_3 U_1 + c_4 U_2$, wenn ich

$$U_1 = \frac{\sigma(u_1 - \gamma)}{\sigma(u_1)\, \sigma(\gamma)} e^{u_1 \zeta \gamma}$$

und

$$U_2 = \frac{\sigma(u_1 + \gamma)}{\sigma(u_1)\, \sigma(\gamma)} e^{-u_1 \zeta \gamma}$$

setze.

Weiters gilt dann

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = \frac{dU_1}{du_1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\zeta(u_1-\gamma)-\zeta(u_1)+\zeta(\gamma)\right]\cdot U_1$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\zeta(u_1+\gamma)-\zeta(u_1)-\zeta(\gamma)\right]\cdot U_2$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\partial \lg C}{\partial \alpha} = 2i\sqrt{2}\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta(u_1)\cdot z + c_3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\zeta(u_1-\gamma)+\zeta(\gamma)\right]\cdot U_1$$

$$+ c_4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\zeta(u_1+\gamma)-\zeta(\gamma)\right]\cdot U_2.$$

Nach Gleichung (7.) des vorigen Teils besteht immer die Beziehung

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \left[2\wp(x)+\frac{2}{3}a\right]\cdot U.$$

Da nun aber U_1 und U_2 partikuläre Integrale dieser Differentialgleichung sind und $u_1 = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)$ ist, wird

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2U_1}{du_1^2} = \frac{1}{2}\left[2\wp(u_1)+\frac{2}{3}a\right]\cdot U_1$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2}\left[2\wp(u_1)+\frac{2}{3}a\right]\cdot U_2.$$

Hieraus folgt sodann

$$w = \left[\wp(u_1)+\frac{a}{3}\right]z + 2i\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\cdot\zeta(u_1)\cdot z$$

$$-2i\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\left[c_3\cdot(\zeta(u_1-\gamma)+\zeta(\gamma))\cdot U_1 + c_4\cdot(\zeta(u_1+\gamma)-\zeta(\gamma)\cdot U_2\right].$$

Bestimmt man noch die vierte Koordinate p der reziproken Polarfläche, so ergibt sich analog

$$p = \left[\wp(u_1)+\frac{a}{3}\right]\cdot t + 2i\,\zeta(u_1)\cdot t\cdot\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}$$

$$-2i\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\left[c_3\cdot(\zeta(u_1-\gamma)+\zeta\gamma)\cdot U_1 + c_4(\zeta(u_1+\gamma)-\zeta(\gamma))\cdot U_2\right].$$

2.

Bestimmung der zur Gruppe (B_1) gehörigen Polarflächen.

Ganz auf die nämliche Weise wie bei der Gruppe (B) bestimmen sich auch hier die Koordinaten $u_1\ v_1\ w_1$ und p_1, doch hat man zu beachten, daß diesmal

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = -\sin 2\omega$$

ist.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\, e^{i\omega}\, \Phi_1 \left[-2\varkappa_1 + 1 + i\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)^2 \right] \\ &= a_{11}\, e^{i\omega}\, \Phi_1 \left[-2\varkappa_1 + 1 - i \sin 2\omega + 2\varkappa_1 - 2\sin^2\omega \right] \\ &= a_{11}\, e^{i\omega}\, \Phi_1 \left[\cos 2\omega - i \sin 2\omega \right] \\ u_1 &= a_{11}\, e^{-i\omega}\, \Phi_1, \end{aligned}$$

dabei ist Φ_1 gesetzt für $\cos\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right]$. Schreibe ich abkürzend für $\sin\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right] = \Phi_2$, so ergibt sich analog

$$v_1 = a_{11}\, e^{-i\omega} \cdot \Phi_2.$$

Bei Berechnung von w_1 und p_1 hat man zu berücksichtigen, daß diesmal $v_1 = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)$ ist, also die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = \frac{dz_1}{dv_1}\frac{i}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 z_1}{dv_1^2}.$$

Es ergibt sich dann

$$w_1 = -\left(\wp(v_1) + \frac{b}{3}\right) z_1 - 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\, \zeta(v_1) \cdot z_1$$
$$+ 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\, \{c_{31}(\zeta(v_1 - \gamma_1) + \zeta\gamma_1) \cdot N_1 + c_{41}[\zeta(v_1 + \gamma_1) - \zeta\gamma_1] \cdot N_2\}$$

$$p_1 = -\left(\wp(v_1) + \frac{b}{3}\right) t_1 - 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\, \zeta(v_1) \cdot t_1$$
$$+ 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\, \{e_{31}[\zeta(v_1 - \gamma) + \zeta\gamma_1]\ N_1 + e_{41}[\zeta(v_1 + \gamma_1) - \zeta\gamma_1] \cdot N_2\}.$$

§ 2.

In diesem Paragraphen möchte ich näher auf die nicht-euklidischen Minimalflächen eingehen, welche dem Werte $\omega = 0$ und $\omega = 2 \operatorname{arctg} e^{\alpha+\beta}$ entsprechen. Dabei gehört $\omega = 0$ zu der zur z Axe degenerierten Rotationsfläche negativen konstanten Krümmungsmaßes,

der Wert $\omega = 2 \operatorname{arctg} e^{\alpha+\beta}$ bestimmt, wie ich am Schlusse des ersten Teiles zeigte, die durch die Rotation der Traktrik entstandene Fläche.

Ich gehe in beiden Fällen nicht von den Gleichungen (B) aus, sondern greife auf das System A zurück.

1.

Für $\omega = 0$ vereinfacht sich System A folgendermaßen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} = x$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = 0 \qquad (u = \alpha + \beta;\ v = \alpha - \beta).$$

Das allgemeinste Integral dieser letzten Gleichung ist gegeben durch

$$x = \varphi(u) + \psi(v).$$

Für $x = \varphi(u)$ bzw. $x = \psi(v)$ geht die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} = x$ über in gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, woraus folgt

$$\varphi = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$$
$$\psi = c_3 \sin v + c_4 \cos v.$$

Dadurch ergibt sich als allgemeinstes Integral des Systems A im Falle $\omega = 0$

$$\Theta_0 = c_1 e^u + c_2 e^{-u} + c_3 \sin v + c_4 \cos v.$$

Die Koordinaten $x\,y\,z\,t$ der zu bestimmenden Fläche müssen nun eine lineare homogene Funktion der vier Summanden von Θ_0 sein.

Unter Berücksichtigung der in Nr. 3 des § 2, Teil II, gemachten Bemerkungen wird

(a)
$$x = a_1 \sin(u\,i)$$
$$y = a_1 \cos(u\,i)$$
$$z = a_2 \cos v$$
$$t = a_2 \sin v \qquad (\text{wobei } a_1^2 + a_2^2 = 1).$$

Quadriert und addiert man, so ergibt sich

$$a_2 (x^2 + y^2) - a_1^2 (z^2 + t^2) = 0.$$

Dadurch sind ausgezeichnete Flächen zweiten Grades definiert, die die Fundamentalfläche in vier Erzeugenden und zwar je zwei

der einen und der anderen Art schneiden. Diese Flächen, die sich auf zwei Arten durch Bewegung in sich überführen lassen und bei den Untersuchungen über Bewegungen[1]) eine große Rolle spielen, sind also ebenfalls nicht-euklidische Minimalflächen.

2.

Wie für $\omega = 0$ gelingt es mir nun auch im Falle

$$C = e^{2i \operatorname{arctg} e^{\sqrt{2}(\alpha+\beta)}}$$

die Koordinaten der zugehörigen nicht-euklidischen Minimalfläche durch elementare Funktionen darzustellen.

Gleichung (3.) in Nr. 1 des § 1 Teil II geht für $\varkappa = 0$ über in

$$\sqrt{2} \sin \omega \frac{d\varphi}{d\omega} + \varphi^2 = e^{2i\omega}.$$

Führt man auch diesmal als neue unabhängige Variable $e^{i\omega} = u$ ein, so ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{d\varphi}{du} (u^2 - 1) + \varphi^2 = u^2. \qquad (1.)$$

Der Koeffizient von $\frac{d\varphi}{du}$ kann zu einer Konstanten gemacht werden durch die Substitution

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = v.$$

Die Ausführung der Quadratur liefert dann

$$u = -i \operatorname{ctg}(iv).$$

Somit verwandelt sich Gleichung (1.) in

$$\frac{d\varphi}{dv} = -\operatorname{ctg}^2(iv)\sqrt{2} - \sqrt{2}\varphi^2.$$

Gehe ich nun von dieser Riccatischen Differentialgleichung zur entsprechenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung über, so lautet diese

$$\frac{d^2W}{dv^2} + 2 \operatorname{ctg}^2(iv) W = 0.$$

[1]) Man vergleiche hiezu Lindemann F. (Dissertation) „Über unendlich kleine Bewegungen", Leipz. 1873.

Um als Koeffizienten ganze rationale Funktionen zu erhalten, setze ich $\sin(iv) = t$.

Wegen

$$\frac{d^2W}{dv^2} = \frac{d^2W}{dt^2}\left(\frac{dt}{dv}\right)^2 + \frac{dW}{dt}\frac{d^2t}{dv^2}$$

ergibt sich

$$\frac{d^2W}{dt^2}(t^2-1) + t\frac{dW}{dt} + 2\frac{1-t^2}{t^2}W = 0. \qquad (2.)$$

Diese Differentialgleichung will ich nun so umformen, daß ich eine Differentialgleichung von der Fuchsschen Klasse erhalte.[1])

Zu diesem Zwecke setze ich $\xi = t^2$, also $\frac{d\xi}{dt} = 2\sqrt{\xi}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{dW}{d\xi}2\sqrt{\xi} \\ \frac{d^2W}{dt^2} &= \frac{d^2W}{d\xi^2}4\xi + 2\frac{dW}{d\xi}\end{aligned}\right| \begin{aligned}&-\xi\sqrt{\xi} \\ &\xi(1-\xi).\end{aligned}$$

Gleichung (2.) transformiert sich dann in

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}4\xi^2(1-\xi) + \frac{dW}{d\xi}2\xi(1-2\xi) - 2(1-\xi)W = 0.$$

Daß die Differentialgleichung von der Fuchsschen Klasse ist, ersieht man sofort, wenn man mit $4\xi^2(1-\xi)$ ausdividiert. Man erhält dann

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} + \frac{dW}{d\xi}\frac{\frac{1}{2}(1-2\xi)}{\xi(1-\xi)} - W\cdot\frac{\frac{1}{2}(1-\xi)^2}{\xi^2(1-\xi)^3} = 0. \qquad (3.)$$

Dabei ist $\sigma = 2$, das heißt die Anzahl der singulären Stellen beträgt 2.

Die allgemeine Lösung des von mir behandelten Falles führte auf eine Lamésche Differentialgleichung, die auch in eine Fuchssche Differentialgleichung umgeformt werden kann, nur ist dann $\sigma = 3$.[2])

[1]) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung nennt man zur Fuchsschen Klasse gehörig, wenn sie die Form haben

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{g(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-a_\varkappa)}\frac{dx}{du} + \frac{h(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{\sigma}(x-a_\varkappa)^2}x = 0,$$

wobei $g(x)$ und $h(x)$ ganze rationale Funktionen sind, und zwar $g(x)$ höchstens vom Grade $(\sigma-1)$ und $h(x)$ höchstens vom Grade $(2\sigma-2)$.

[2]) Daß die Lamésche Differentialgleichung in eine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse übergeführt werden kann, läßt sich leicht zeigen. Die

Gleichung (3.) läßt sich, da sie eine sogenannte Riemannsche Differentialgleichung ist, bekanntlich immer in die Gaußsche Differentialgleichung überführen.[1]) Dies erreiche ich durch die Substitution

$$W = \eta\, \xi^{-\frac{1}{2}} \qquad (\eta \text{ die neue abhängige Variable}).$$

Es ist dann

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\xi}\,\xi^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\eta\,\xi^{-\frac{3}{2}} \quad \Big| \; 2\,\xi\,(1-2\,\xi)$$

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\,\xi^{-\frac{1}{2}} - \frac{d\eta}{d\xi}\,\xi^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\,\eta\,\xi^{-\frac{5}{2}} \quad \Big| \; 4\,\xi^2\,(1-\xi).$$

Zur Bestimmung von η ergibt sich dann

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\,\xi^{-\frac{1}{2}}\,[4\,\xi^2\,(1-\xi)] + \frac{d\eta}{d\xi}\,[2\,\xi\,\xi^{-\frac{1}{2}}\,(1-2\,\xi) - 4\,\xi^2\,\xi^{-\frac{3}{2}}\,(1-\xi)]$$

$$+\,\eta\,[3\,\xi^{-\frac{1}{2}}\,(1-\xi) - \xi^{-\frac{1}{2}}\,(1-2\,\xi) - 2\,\xi^{-\frac{1}{2}}\,(1-\xi)] = 0,$$

eine Gleichung, die vereinfacht werden kann in

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\,4\,\xi\,(1-\xi) - 2\,\xi\,\frac{d\eta}{d\xi} + \eta\,\xi = 0 \\ &\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{\xi\,(1-\xi)}\,\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{-\frac{1}{4}}{\xi\,(1-\xi)}\,\eta = 0. \end{aligned} \tag{4.}$$

Dies ist nun eine Gaußsche Differentialgleichung, für deren Argumente die folgenden Beziehungen gelten

$$\alpha + \beta = -1; \quad \alpha\,\beta = -\tfrac{1}{4}; \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}; \quad \alpha - \beta = \sqrt{2},$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}; \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Lamésche Differentialgleichung lautet $\frac{d^2z}{du^2} - [n\,(n+1)\,\wp\,(u) + B]\,z = 0$. Setze ich nun $\wp\,(u) = y$, so erhalte ich

$$\frac{d^2z}{dy^2}\,4\left(y-\wp\,\frac{\omega_1}{2}\right)\left(y-\wp\,\frac{\omega_2}{2}\right)\left(y-\wp\,\frac{\omega_3}{2}\right) + \frac{dz}{dy}\,\frac{1}{2}\,(12\,y^2 - g_2) - [n\,(n+1)\,y + B]\,z = 0,$$

dabei ist $\sigma = 3$; also $2\,\sigma - 2 = 4$.

[1]) Eine Gaußsche Differentialgleichung nennt man eine Gleichung von der Form

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,\frac{du}{dx} - \alpha\,\beta\,u = 0.$$

Als partikuläre Integrale der Gleichung (4.) erhalte ich nun

$$\eta_{01} = F\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\quad -\frac{\sqrt{2}+1}{2};\quad -\frac{1}{2};\quad \xi\right) = F_1$$

$$\eta_{12} = \xi^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\quad \frac{2-\sqrt{2}}{2};\quad \frac{5}{2};\quad \xi\right) = \xi^{\frac{3}{2}} F_2.$$

Gehe ich nun wieder auf den zu bestimmenden Wert x zurück, so ergibt sich unter Berücksichtigung der eingeführten Transformationen

$$x_{01} = \frac{1}{\sin(iv)} F\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\quad -\frac{\sqrt{2}+1}{2};\quad -\frac{1}{2};\quad \sin^2(iv)\right)$$

$$x_{02} = \sin^2(iv) F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\quad \frac{2-\sqrt{2}}{2};\quad \frac{5}{2};\quad \sin^2(iv)\right).$$

Für $\varkappa = 0$ ist somit $\Omega(\alpha+\beta)$ bestimmt durch

$$\Omega_0 = c_1 x_{01} + c_2 x_{02}$$

$$= c_1 \frac{1}{\sin\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right)} F\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2};\quad \ldots;\quad \sin^2\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right)\right]$$

$$+ c_2 \sin^2\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right) F\left[\frac{\sqrt{2}+2}{2};\quad \ldots;\quad \sin^2\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)\right)\right].$$

Analog wie im allgemeinen Fall bestimmt sich jetzt $R_0(v)$ aus der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 R_0}{dv^2} + R_0 = 0 \qquad (v = \alpha - \beta)$$

wie folgt

$$R_0 = c_3 \sin v + c_4 \cos v.$$

Es handelt sich jetzt noch darum, Ω_0 durch gewöhnliche Funktionen auszudrücken. Dies gelingt durch die Benützung der von Gauß aufgestellten Beziehungen für die hypergeometrische Reihe (cf. Gauß, gesammelte Werke, Bd. III „Disquisitiones circa seriem inf. $1 + \frac{1\cdot 2}{\alpha\beta} x + \cdots$“).

Diese Relationen mögen kurz zusammengestellt werden:

1. $$\frac{dF(\alpha\beta\gamma x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x),$$

2. $$\cos(nt) = \cos t \cdot F(\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \sin^2 t),$$

3. $F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x) = (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}\cdot F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$,

4. $\cos(nt) = F(\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2},\ \sin^2 t)$,

5. $\sin(nt) = n\sin t\cdot\cos t\cdot F(\frac{1}{2}n+1,\ -\frac{1}{2}n+1,\ \frac{3}{2},\ \sin^2 t)$,

6. $\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\ \beta,\ \gamma+1,\ x)-\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma-1,\ x)=0$,

7. $F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta,\gamma-1,x) = -\dfrac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)}\cdot F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)$,

8. $\sin(nt) = n\sin t\cdot F(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin^2 t)$.

Die Funktion F_1 läßt sich nun folgendermaßen umformen

$$\frac{dF_1}{d\sin^2(iv)} = \frac{1}{2}F\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2(iv)\right) \qquad \text{(nach 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}\,iv)}{\cos iv} \qquad \text{(nach 2)}$$

$\dfrac{dF_1}{d\sin^2(iv)}$ läßt sich auf andere Weise bestimmen:

$$\frac{dF_1}{d\sin^2 iv} = \frac{1}{2}(1-\sin^2 iv)^{-\frac{1}{2}}\cdot F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2 iv\right) \qquad \text{(nach 3)}$$

$$= \frac{\cos(\sqrt{2}\,iv)}{2\cos iv} \qquad \text{(nach 4)}$$

$$\frac{d^2F_1}{d^2\sin^2 iv} = \frac{d\,\dfrac{dF_1}{d\sin^2 iv}}{dv}\cdot\frac{dv}{d\sin iv}\cdot\frac{d\sin iv}{d\sin^2 iv}$$

$$= \frac{i}{2}\cdot\frac{\cos\sqrt{2}\,iv\sin iv-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,iv\cdot\cos iv}{\cos^2 iv}\cdot\frac{1}{2i\cos iv\sin iv}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{2}\,iv}{4\cos^3 iv}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin\sqrt{2}\,iv}{\sin iv\cos^2 iv}.$$

Dieser Wert ergibt sich auch, wenn man Formel 1 und 5 benützt.

F_1 muß jetzt auch die Differentialgleichung (4.) befriedigen. Setzt man die eben gefundenen Werte für die erste und zweite Ableitung ein, so wird die Gleichung

$$\frac{d^2F_1}{d^2\sin^2 iv}+\frac{-\frac{1}{2}}{\sin^2 iv(1-\sin^2 iv)}\frac{dF_1}{d\sin^2 iv}-\frac{-\frac{1}{4}}{\sin^2 iv(1-\sin^2 iv)}F_1=0$$

die Berechnung von F_1 ermöglichen.

Es wird

$$F_1 = 4\sin^2 iv\cos^2 iv\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\cos^2 iv\sin^2 iv}+\frac{1}{4}\frac{\cos\sqrt{2}iv}{\cos^3 iv\sin^2 iv}-\frac{\cos\sqrt{2}iv}{4\cos^3 iv}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv\sin iv+\frac{\cos\sqrt{2}iv-\cos\sqrt{2}iv\sin^2 iv}{\cos iv}$$

$$= \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv\sin iv+\cos\sqrt{2}iv\cdot\cos iv$$

$$x_{01} = \frac{F_1}{\sin iv} = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv+\cos\sqrt{2}iv\,\mathrm{ctg}\,iv.$$

Selbstverständlich hätte man F_1 auch durch Integration erhalten können, doch würde der so erhaltene Wert von F_1 nur bis auf eine Konstante genau sein.

Ich gehe nun daran, auch F_2 durch gewöhnliche Funktionen auszudrücken. Es ist

$$\frac{3}{4}F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+1;\ \frac{3}{2};\ \sin^2 iv\right)-\frac{1}{4}\sin^2 iv\,F_2$$

$$-\frac{3}{4}(1-\sin^2 iv)\,F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)=0 \quad \text{(nach 6)}.$$

Unter Berücksichtigung von 5 kann hiefür geschrieben werden

$$0=\frac{3}{4}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\sqrt{2}\sin iv\cos iv}$$

$$-\frac{1}{4}\sin^2 iv\,F_2-\frac{3}{4}(1-\sin^2 iv)\,F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right).$$

Es handelt sich nun darum

$$F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

durch gewöhnliche Funktionen auszudrücken, denn dann ist dies auch für F_2 möglich.

$$F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

$$=(1-\sin^2 iv)^{-\frac{3}{2}}\cdot F\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

(nach 3)

$$F\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

$$-F\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

$$= -\sin^2 iv \cdot F\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3};\ \frac{1+\sqrt{2}}{2};\ \frac{3}{2};\ \sin^2 iv\right) \quad \text{(nach 7)}$$

$$F\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ \frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right) = F_1 - \sin^2 iv \cdot \frac{\sin\sqrt{2}iv}{\sqrt{2}\sin iv}$$

(nach 8).

Somit

$$F\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};\ \frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 iv\right)$$

$$= (1-\sin^2 iv)^{-\frac{3}{2}}\left[F_1 - \frac{\sin iv \sin\sqrt{2}iv}{\sqrt{2}}\right].$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für F_2 ein, so ergibt sich

$$F_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\sin^3 iv\cos iv} - \frac{3}{\cos iv\sin^2 iv}\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv\sin iv\\ -\sqrt{2}\sin iv\sin\sqrt{2}iv\\ +\cos\sqrt{2}iv\cos iv\end{array}\right\}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\sin^3 iv\cos iv} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\cos iv\sin iv} - \frac{3\cos\sqrt{2}iv}{\sin^2 iv}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}iv}{\sin^3 iv\cos iv}(1-\sin^2 iv) - \frac{3\cos\sqrt{2}iv}{\sin^2 iv}$$

$$F_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sin\sqrt{2}iv\cos iv}{\sin^3 iv} - \frac{3\cos\sqrt{2}iv}{\sin^2 iv}$$

$$x_{02} = \sin^2 iv\, F_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}iv\,\operatorname{ctg} iv - 3\cos\sqrt{2}iv.$$

Es ergibt sich somit für $\Omega_0(\alpha+\beta) = c_1 x_{01} + c_2 x_{02}$

$$\Omega_0 = c_1(\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv + \cos\sqrt{2}vi\operatorname{ctg} iv)$$

$$+ c_2\frac{3}{\sqrt{2}}(\sin\sqrt{2}iv\operatorname{ctg} iv - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}iv).$$

Selbstverständlich hätte man das allgemeinste Integral für Ω_0 sofort angeben können, nachdem F_1 berechnet war, da ja das Integral

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt ist, wenn man ein partikuläres Integral kennt.

Das allgemeine Integral des Systems A lautet somit für

$$C = e^{2i\,\mathrm{artg}\,e^{\sqrt{2}(\alpha+\beta)}}$$

$$\Theta_1 = c_1(\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,iv + \operatorname{ctg} iv\cos\sqrt{2}\,iv)$$

$$+ c_2\frac{3}{\sqrt{2}}(\sin\sqrt{2}\,iv\operatorname{ctg} iv - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,iv) + c_3\sin(\alpha-\beta) + c_4\cos(\alpha-\beta),$$

dabei ist $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha+\beta)$.

Die Koordinaten $x\,y\,z\,t$ der zu bestimmenden Fläche müssen nun eine lineare Relation der vier Summanden von Θ_1 sein.

Unter Berücksichtigung der in Nr. 3 des § 2 Teil II gemachten Bemerkungen wird

$$z = c_4\,e^{i\omega}\cos(\alpha-\beta)$$
$$t = c_4\,e^{i\omega}\sin(\alpha-\beta)$$
$$x = a_1\,x_{01} + a_2\,x_{02}$$
$$y = b_1\,x_{01} + b_2\,x_{02}.$$

Die Konstanten c_4, a_1, a_2, b_1, b_2 sind nun so zu bestimmen, daß $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$ wird. Es muß somit

$$x^2+y^2 = 1 + K\operatorname{ctg}^2 iv \quad \text{werden} \quad (K = c_4^2)$$
$$x^2+y^2 = \sin^2\sqrt{2}\,iv\,[2(a_1^2+b_1^2) + (a_2^2+b_2^2)\operatorname{ctg}^2 iv$$
$$+ \cos^2\sqrt{2}\,iv\,[2(a_2^2+b_2^2) + (a_1^2+b_1^2)\operatorname{ctg}^2 iv]$$
$$+ \cos\sqrt{2}\,iv\sin\sqrt{2}\,iv\operatorname{ctg} iv\,[(a_1^2+b_1^2) - (a_2^2+b_2^2)]$$
$$+ 2(a_1a_2+b_1b_2)\,x_{01}\,x_{02} = 1 + K\operatorname{ctg}^2 iv.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_1^2+b_1^2 = a_2^2+b_2^2$$

wird.

Es ist dann

$$2(a_1^2+b_1^2) + (a_1^2+b_1^2)\operatorname{ctg}^2 iv = 1 + K\operatorname{ctg}^2 iv,$$

somit

$$2(a_1^2+b_1^2) = 1; \qquad K = \tfrac{1}{2}.$$

Die Gleichung der zu $C = e^{2i\,\mathrm{arctg}\,e^{\sqrt{2}(\alpha+\beta)}}$ gehörigen nicht-euklidischen Minimalfläche lautet:

$$x = a_1(\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv + \operatorname{ctg} iv\cos\sqrt{2}iv) + a_2(\sin\sqrt{2}iv\operatorname{ctg} iv - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}iv)$$

(c)
$$y = b_1(\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv + \operatorname{ctg} iv\cos\sqrt{2}iv) + b_2(\sin\sqrt{2}iv\operatorname{ctg} iv - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}iv).$$

$$z = \tfrac{1}{2}e^{i\omega}\cos(\alpha-\beta)$$

$$t = \tfrac{1}{2}e^{i\omega}\sin(\alpha-\beta).$$

Im Anschluß hieran möchte ich noch die zugehörige Polarfläche bestimmen. Es sind deshalb vor allem die ersten und zweiten Ableitungen zu berechnen.

$$\frac{\partial x_{01}}{\partial\alpha} = \frac{dx_{01}}{dv}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{dx_{01}}{dv} = i\left[2\cos\sqrt{2}iv - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv\operatorname{ctg} iv - \frac{\cos\sqrt{2}iv}{\sin^2 iv}\right]a_1$$

$$\frac{\partial\lg C}{\partial\alpha} = 2i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 2i\sqrt{2}\sin\omega = -\frac{i\cdot\sqrt{2}}{\cos iv\sin iv},$$

da ja $e^{i\omega} = \operatorname{ctg} vi$ ist.

$$\frac{\partial^2 x_{01}}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2x_{01}}{dv^2} = -\operatorname{ctg}^2 vi\, x_{01}$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv\cos^2 iv}{\sin^2 iv} - \frac{\cos\sqrt{2}iv\cos^3 iv}{\sin^3 iv}\right]a_1$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial\alpha}\frac{\partial x_{01}}{\partial\alpha} = a_1\left[\frac{2\cos\sqrt{2}iv}{\cos iv\sin iv} - \frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv}{\sin^2 iv} - \frac{\cos\sqrt{2}iv}{\cos iv\sin^3 iv}\right].$$

Wenn

$$\frac{\partial^2 x_{01}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial x_{01}}{\partial\alpha}\frac{\partial C}{\partial\alpha} = u_1 a_1$$

gesetzt wird, ergibt sich

$$u_1 = \left[\frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv(1-\cos^2 iv)}{\sin^2 iv} + \frac{\cos\sqrt{2}iv(1-\cos^4 iv)}{\cos iv\sin^3 iv} - \frac{2\cos\sqrt{2}iv}{\cos iv\sin iv}\right]$$

$$= \left[\sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv - \frac{2\cos\sqrt{2}iv}{\cos iv\sin iv} + \frac{\cos\sqrt{2}iv(1+\cos^2 iv)}{\cos iv\sin iv}\right.$$

$$= \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv + \frac{\cos\sqrt{2}iv(-1+\cos^2 iv)}{\cos iv\sin iv}$$

$$u_1 = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}iv - \cos\sqrt{2}iv\operatorname{tg} iv.$$

Ebenso wird für x_{02}

$$\frac{\partial x_{02}}{\partial \alpha} = \frac{dx_{02}}{dv}\frac{\sqrt{2}}{2} = a_2 \frac{\sqrt{2}}{2} i \left[-\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sin \sqrt{2} iv}{\sin^2 iv} + 3 \cos \sqrt{2} iv \operatorname{ctg} iv \right.$$
$$\left. + 3\sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv \right]$$

$$\frac{\partial^2 x_{02}}{\partial \alpha^2} = -\operatorname{ctg}^2 vi \cdot x_{02} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sin \sqrt{2} iv \cos^3 iv}{\sin^3 iv} + 3 \frac{\cos \sqrt{2} iv \cos^2 iv}{\sin^2 iv}$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{\partial x_{02}}{\partial \alpha} = a_2 \left[-\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sin \sqrt{2} iv}{\sin^3 iv \cos iv} + \frac{3 \cos \sqrt{2} iv}{\sin^2 iv} + \frac{3 \cdot \sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv}{\sin iv \cos iv} \right].$$

Bezeichnet man

$$\frac{\partial^2 x_{01}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{\partial x_{02}}{\partial \alpha}$$

mit $a_2 u_2$, so wird

$$u_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sin \sqrt{2} iv (1 - \cos^4 iv)}{\sin^3 iv \cos iv} - \frac{3 \cos \sqrt{2} iv (1 - \cos^2 iv)}{\sin^2 iv} - \frac{3\sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv}{\sin iv \cos iv}$$
$$= -\frac{3\sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv}{\sin iv \cos iv} - 3 \cos \sqrt{2} iv + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \sqrt{2} iv (1 + \cos^2 iv)}{\sin iv \cos iv}$$
$$= -3 \cos \sqrt{2} iv - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \sqrt{2} i (2 - 1 - \cos^2 iv)}{\sin iv \cos iv}$$

$$u_2 = -3 \cos \sqrt{2} iv - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} iv \operatorname{tg} iv.$$

Es ergibt sich somit

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1 (\sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv - \cos \sqrt{2} iv \operatorname{tg} iv)$$
$$+ a_2 \left(-3 \cos \sqrt{2} iv - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} iv \operatorname{tg} iv \right).$$

Analog bestimmt sich

$$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 = b_1 (\sqrt{2} \sin \sqrt{2} iv - \cos \sqrt{2} iv \operatorname{tg} iv)$$
$$+ b_2 \left(-3 \cos \sqrt{2} iv - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} iv \operatorname{tg} iv \right).$$

Die Werte für w und p können sofort aus dem allgemeinen Wert entnommen werden (cf. Nr. 1 § 1 Teil III)

$$w = -c e^{-i\omega} \cos (\alpha - \beta)$$
$$p = -c e^{-i\omega} \sin (\alpha - \beta).$$

Zum Schlusse möchte ich jetzt die Gleichungen der gefundenen nicht-euklidischen Minimalflächen, die zugleich nicht-euklidische Rotationsflächen sind, zusammenschreiben.

$$\text{I. } \omega = \operatorname{am}\left[\sqrt{2}\sqrt{\varkappa}\,(\alpha+\beta)\right].$$

a)
$$x = a_1 e^{i\omega}\cos\left[v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}\right]$$
$$y = a_1 e^{i\omega}\sin\left[v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}\right]$$
$$z = c_3\frac{\sigma(u_1-\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{u_1\zeta\gamma} + c_4\frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{-u_1\zeta\gamma}$$
$$t = e_3\frac{\sigma(u_1-\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{u_1\zeta\gamma} + e_4\frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{-u_1\zeta\gamma},$$

wobei die Konstanten den auf Seite 24 und 25 aufgestellten Gleichungen genügen müssen.

b)
$$x_p = -a_1 e^{-i\omega}\cos\left(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}\right)$$
$$y_p = -a_1 e^{-i\omega}\sin\left(v\cdot\sqrt{2\varkappa+1}\right)$$
$$z_p = \left[\wp(u_1)+\frac{a}{3}+2i\zeta u_1\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\right]\cdot z$$
$$-2i\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\cdot\left[c_3\frac{\sigma(u_1-\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{u_1\zeta\gamma}\left(\zeta(u_1-\gamma)+\zeta(\gamma)\right)\right.$$
$$\left.+\,c_4\frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{-u_1\zeta\gamma}\left(\zeta(u_1+\gamma)-\zeta\gamma\right)\right]$$
$$t_p = \left[\wp(u_1)+\frac{a}{3}+2i\zeta(u_1)\cdot\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\right]\cdot t$$
$$-2i\sqrt{\varkappa+\sin^2\omega}\left[e_3\frac{\sigma(u-\gamma)}{3\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{u_1\zeta\gamma}\left(\zeta(u_1-\gamma)+\zeta\gamma\right)\right.$$
$$\left.+\,e_4\frac{\sigma(u_1+\gamma)}{\sigma u_1\,\sigma\gamma}e^{-u_1\zeta\gamma}\left(\zeta(u_1+\gamma)-\zeta\gamma\right)\right].$$

$$\text{II. } \omega = \operatorname{am}\left[\sqrt{2}\sqrt{\varkappa_1}\,(\alpha-\beta)\right].$$

c)
$$x_1 = a_{11}e^{i\omega}\cos\left[u\cdot\sqrt{2\varkappa_1-1}\right]$$
$$y_1 = a_{11}e^{i\omega}\sin\left[u\cdot\sqrt{2\varkappa_1-1}\right]$$
$$z_1 = c_{31}\frac{\sigma(v_1-\gamma_1)}{\sigma v_1\,\sigma\gamma_1}e^{v_1\zeta\gamma_1} + c_{41}\frac{\sigma(v_1+\gamma_1)}{\sigma(v_1)\,\sigma\gamma_1}e^{-v_1\zeta\gamma_1}$$
$$t_1 = e_{31}\cdot\frac{\sigma(v_1-\gamma_1)}{\sigma v_1\,\sigma\gamma_1}e^{v_1\zeta\gamma_1} + e_{41}\frac{\sigma(v_1+\gamma_1)}{\sigma v_1\,\sigma\gamma_1}e^{-v_1\zeta\gamma_1},$$

wobei die Konstanten an die Bedingungen auf Seite 29 gebunden sind

$$x_{1p} = a_{11}\, e^{-i\omega} \cos\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right]$$

$$y_{1p} = a_{11}\, e^{-i\omega} \sin\left[u \cdot \sqrt{2\varkappa_1 - 1}\right]$$

$$z_{1p} = -\left[\wp v_1 + \frac{b}{3} + 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\,\zeta v_1\right] \cdot z_1$$

$$+ 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega} \cdot \left[c_{31} \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma\gamma_1} e^{v_1 \zeta\gamma_1} (\zeta(v_1 - \gamma_1) + \zeta\gamma_1)\right.$$

$$\left. + c_{41} \frac{\sigma(v_1 + \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma\gamma_1} e^{-v_1 \zeta\gamma_1} (\zeta(v_1 + \gamma_1) - \zeta\gamma_1)\right]$$

$$t_{1p} = -\left[\wp(v_1) + \frac{b}{3} + 2 \cdot \zeta v_1 \sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\right] \cdot t_1$$

$$+ 2\sqrt{\varkappa_1 - \sin^2\omega}\left[e_{31} \frac{\sigma(v_1 - \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma\gamma_1} e^{v_1 \zeta\gamma_1} (\zeta(v_1 - \gamma_1) + \zeta\gamma_1)\right.$$

$$\left. + e_{41} \frac{\sigma(v_1 + \gamma_1)}{\sigma v_1\, \sigma\gamma_1} e^{-v_1 \zeta\gamma_1} (\zeta(v_1 + \gamma_1) - \zeta\gamma_1)\right].$$

Dazu kommt die Fläche zweiter Ordnung, die keine Rotationsfläche ist, jedoch die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, sich bei Bewegungen in sich überführen zu lassen

$$x = a_1 \sin(u\, i)$$

$$y = a_1 \cos(u\, i)$$

$$z = a_2 \cos v$$

$$t = a_2 \sin v,$$

wobei $(a_1^2 + a_2^2 = 1)$.

Vita.

Geboren am 19. Februar 1882 zu Stadtsteinach, besuchte ich in München die Volksschule und das Gymnasium, und zwar die Simultanschule I sowie das Maximiliansgymnasium. Nach Ablegung des Absolutoriums im Jahre 1901 widmete ich mich ein Semester dem Bauingenieurfach, sodann trat ich im April 1902 an die Universität München über und oblag ausschließlich dem Studium der Mathematik und Physik. Ich hörte die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten: Bauer †, von Baeyer, von Braunmühl, Brentano, Burmester, Döhlemann, von Dyck, Ebert, Finsterwalder, Fischer, Göttler, Grätz, von Heigel, Lindemann, Pringsheim, Ranke, Röntgen, Voll, Voss, von Weber.

Allen meinen verehrten Lehrern, besonders den Herren Professoren Dr. Ferdinand Lindemann und Dr. Aurel Voss fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet. Nach bestandenem Lehramtsexamen wurde ich im November 1905 dem K. Theresiengymnasium München als Lehramtspraktikant zugeteilt.